



TITLE:

# 統計的逐次決定論における十分性と推移性について(非正則推定論の構造の研究)

AUTHOR(S):

西平, 祐治

---

CITATION:

西平, 祐治. 統計的逐次決定論における十分性と推移性について(非正則推定論の構造の研究). 数理解析研究所講究録 1997, 1007: 35-50

ISSUE DATE:

1997-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/61483>

RIGHT:

# 統計的逐次決定論における十分性と推移性について

筑波大・数学 西平 祐治 (Yuji Nishihira)

## 序章

逐次決定論では、予め定められた大きさをもつ標本に基づいた決定を下す非逐次決定論とは異なっていて、各観測後に標本抽出を停止して直ぐに決定を下すか、または標本抽出を継続した後に適時に決定を下すかどうかを定めることができる。非逐次の場合と同様に、適切な決定を下す際に十分統計量は重要であり、さらに推移性をもつ十分統計量に基づいて決定を下せば有効である。通常、逐次解析では統計量に基づいて停止則を含む逐次決定方式を考え、その性質を論じることが多い。([AK96], [F67], [S85])

本論文では、逐次決定理論において測度論の観点から十分性、推移性について部分加法族を用いて考察する。まず第1章で決定関数、部分加法族の列に対する十分性、必要性、推移性等の定義をし、第2章で Bahadur[B54] によって与えられた十分推移性に対する必要条件について述べる。第3章は本論文の主要結果である。この章では、前章で述べた必要条件を改良して、決定関数の条件付き期待値を用いた形で必要十分条件を求める。最後に第4章で、決定関数が第3章で述べた必要十分条件は満たしていないが、同値となる例を挙げる。実際、十分性と推移性の関係については、推移列であるが十分列でない場合について述べる。

## 1 定義

ここでは、本論文で用いる概念及び記号の定義を与える。

まず  $(X, S)$  を標本空間とし、 $P = \{P_\theta; \theta \in \Omega\}$  を  $(X, S)$  で定義された確率分布族とする。ここで  $\Omega$  は母数空間である。また  $\{S^{(m)}\}$  を  $S^{(m)} \subset S^{(m+1)}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) を満たす  $S$  の部分加法族の無限列とする。このとき  $(X, S, P, \{S^{(m)}\})$  を枠組 (framework) という。

### 定義 1.1.

各  $m = 1, 2, \dots$  に対して  $a_m$  が  $0 \leq a_m \leq 1$  を満たす  $S^{(m)}$ -可測関数であるとき、関数列  $\{a_m\}$  を  $\{S^{(m)}\}$ -可測な停止則 (measurable stopping rule) という。

次に  $\{S^{(m)}\}$ -可測な停止則  $\{a_m\}$  が与えられたとき、各  $m = 1, 2, \dots$  に対して

$$\begin{cases} \alpha_1(x) = a_1(x), \\ \alpha_m(x) = \{\prod_{i=1}^{m-1} (1 - a_i(x))\} a_m(x) \quad (m > 1), \end{cases} \begin{cases} \beta_1(x) = 1, \\ \beta_m(x) = \prod_{i=1}^{m-1} (1 - a_i(x)) \quad (m > 1) \end{cases} \quad (1.1)$$

とおく。このとき停止則  $\{a_m\}$  が閉 (closed) であるとは

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m(x) = 1 \quad \text{a.e.}(S, P)$$

が成り立つと定義する。

また  $(D_1, \mathbf{D}_1), (D_2, \mathbf{D}_2), \dots$  を可測空間の無限列とすると、 $(D_m, \mathbf{D}_m)$  を  $m$  番目の最終決定空間 ( $m$ th terminal decision space) という。各々の最終決定空間は Borel 型で、 $D_m$  は少なくとも 2 点を含むと仮定する。

### 定義 1.2.

各  $m = 1, 2, \dots$  に対して、 $b_m = b_m(C_m, x)$  は  $D_m \times X$  で定義されて、区間  $[0, 1]$  に属する値をとり、

(a) 任意の  $C_m \in D_m$  に対して、 $b_m(C_m, \cdot)$  は  $S^{(m)}$ -可測関数

(b) 任意の  $x \in X$  に対して、 $b_m(\cdot, x)$  は  $D_m$  上の確率測度

を満たすものとする。

このとき、 $\{b_m\}$  を  $\{S^{(m)}\}$ -可測最終決定則 (measurable terminal decision rule) という。

### 定義 1.3.

$\{S^{(m)}\}$ -可測な停止則  $\{a_m\}$  と  $\{S^{(m)}\}$ -可測最終決定則  $\{b_m\}$  に対して、2 つの列の組  $\{a_m\}, \{b_m\}$  を  $\{S^{(m)}\}$ -可測決定関数 (measurable decision function) という。また  $\{S^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\mu = \{a_m\}, \{b_m\}$  に対して

$$\lambda_\theta(m; C_m | \mu) = \int_X \alpha_m(x) b_m(C_m, x) P_\theta(dx)$$

とおく。任意の  $m, C_m \in D_m, \theta \in \Omega$  に対して

$$\lambda_\theta(m; C_m | \mu) = \lambda_\theta(m; C_m | \nu)$$

が成り立つとき、2 つの決定関数  $\mu$  と  $\nu$  は同値であるという。また、 $\{S_0^{(m)}\}$  を各  $m = 1, 2, \dots$  に対して  $S_0^{(m)} \subset S^{(m)}$  となる  $S$  の部分加法族の任意の列とする。

本論文では部分加法族の列  $\{S_0^{(m)}\}$  を中心に議論を進めていく。

**定義 1.4.**

$\{S_0^{(m)}\}$  が十分列 (sufficient sequence) とは、各  $m = 1, 2, \dots$  に対して  $S_0^{(m)}$  が  $S^{(m)}$  上の確率分布族  $P$  に対して十分加法族、すなわち、任意の  $A \in S^{(m)}$  に対して、 $S_0^{(m)}$ -可測関数  $\varphi_A$  が存在して、任意の  $\theta \in \Omega$  に対して

$$\varphi_A(x) = E_\theta[\chi_A(X)|S_0^{(m)}, x] \quad \text{a.e.}(S, P_\theta)$$

となることである。

**定義 1.5.**

$\{S_0^{(m)}\}$  が必要列 (necessary sequence) とは、各  $m = 1, 2, \dots$  に対して  $S_0^{(m)}$  が  $S^{(m)}$  上の確率分布族  $P$  に対して必要加法族、すなわち、 $P$  に対して十分加法族となる任意の  $S^*$  に対して

$$S_0^{(m)} \subset S^* (S, P)$$

となることである。

**定義 1.6.**

$\{S_0^{(m)}\}$  が推移列 (transitive sequence) とは、任意の  $m, B \in S_0^{(m+1)}, \theta \in \Omega$  に対して

$$E_\theta[\chi_B(X)|S^{(m)}, x] = E_\theta[\chi_B(X)|S_0^{(m)}, x] \quad \text{a.e.}(S, P_\theta) \quad (1.2)$$

が成り立つことである。

**定義 1.7.**

枠組  $(X, S, P, \{S^{(m)}\})$  が正則 (regular) であるとは、 $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots$  の部分加法族の列  $S_*^{(1)}, S_*^{(2)}, \dots$  が存在して、 $\{S_*^{(m)}\}$  が必要十分推移列となることである。

**2 十分推移性に対する必要条件**

この章では Bahadur[B54] に従って、十分性、必要性等の特徴付けを行う。また、各定理の証明は Bahadur[B54] に与えられているので、省略する。

**定理 2.1.**

$R_0$  を少なくとも 2 点を含む  $R$  の Borel 集合とし、 $B_0$  を  $R_0$  の Borel 部分集合の全体とする。このとき次の (i), (ii), (iii) は同値である。

- (i)  $S_0$  は  $P$  に対する十分加法族である。  
(ii) 任意の  $S$ - $P$ -可積分関数  $f(\cdot)$  に対して、 $S_0$ - $P$ -可積分関数  $g(\cdot)$  が存在して、任意の  $\theta \in \Omega$  に対して

$$g(x) = E_\theta[f(X)|S_0, x] \quad \text{a.e.}(S, P_\theta)$$

が成り立つ。

- (iii) (a) 任意の  $B \in B_0$  に対して、 $\mu(B, \cdot)$  は  $S$ - $P$ -可積分関数  
(b) 任意の  $x \in X$  に対して、 $\mu(\cdot, x)$  は  $B_0$  上の有限測度を満たす  $B_0 \times X$  で定義された任意の関数  $\mu(\cdot, \cdot)$  に対して、  
(a') 任意の  $B \in B_0$  に対して、 $\nu(B, \cdot)$  は  $S_0$ - $P$ -可積分関数  
(b') 任意の  $x \in X$  に対して、 $\nu(\cdot, x)$  は  $B_0$  上の有限測度を満たす  $B_0 \times X$  で定義された関数  $\nu(\cdot, \cdot)$  が存在して、任意の  $B \in B_0, \theta \in \Omega$  に対して

$$\nu(B, x) = E_\theta[\mu(B, X)|S_0, x] \quad \text{a.e.}(S, P_\theta)$$

が成り立つ。

### 定理 2.2.

$\{S_0^{(m)}\}$  を十分列とする。このとき、任意の  $\{S^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  に対して、 $\{S_0^{(m)}\}$ -可測最終決定則  $\{b_m^0\}$  が存在して、 $\nu = [\{a_m\}, \{b_m^0\}]$  と  $\mu$  は同値である。

### 定理 2.3.

$\{S_0^{(m)}\}$  が推移列となるための必要十分条件は、任意の  $m, A \in S^{(m)}, \theta \in \Omega$  に対して

$$E_\theta[\chi_A(X)|S_0^{(m+1)}, x] = E_\theta[E_\theta[\chi_A(X)|S_0^{(m)}, X]|S_0^{(m+1)}, x] \quad \text{a.e.}(S, P_\theta) \quad (2.1)$$

が成り立つことである。

### 定理 2.4.

$\{S_0^{(m)}\}$  が十分推移列となるための必要十分条件は、任意の  $\{S^{(m)}\}$ -可測な停止則  $\{a_m\}$  に対して、 $\{S_0^{(m)}\}$ -可測な停止則  $\{a_m^0\}$  が存在して、任意の  $m, \theta \in \Omega$  に対して

$$E_\theta[\alpha_m(X)|S_0^{(m)}, x] = E_\theta[\alpha_m^0(X)|S_0^{(m)}, x] \quad \text{a.e.}(S, P_\theta) \quad (2.2)$$

が成り立つことである。

**定理 2.5.**

$\{S_0^{(m)}\}$  を十分推移列とする。このとき、任意の  $\{S^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  に対して、 $\{S_0^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\nu = [\{a_m^0\}, \{b_m^0\}]$  が存在して、 $\mu$  と  $\nu$  は同値となる。

**定理 2.6.**

$S_1$  と  $S_2$  は  $S$  の任意の部分加法族とし、 $c, d$  は  $-\infty \leq c < d \leq \infty$  を満たすとする。また、 $(R_0, B_0)$  は定理 2.1 と同じとする。このとき次の (i), (ii), (iii) は同値である。

(i)  $S_1 \subset S_2$  ( $S, P$ )

(ii)  $c \leq f \leq d$  となる任意の  $S_1$ -可測関数  $f(\cdot)$  に対して、 $c \leq g \leq d$  となる  $S_2$ -可測関数  $g(\cdot)$  が存在して

$$g(x) = f(x) \quad \text{a.e.}(S, P)$$

が成り立つ。

(iii) (a) 任意の  $B \in B_0$  に対して、 $\mu(B, \cdot)$  は  $S_1$ -可測関数

(b) 任意の  $x \in X$  に対して、 $\mu(\cdot, x)$  は  $B_0$  上の確率測度

を満たす  $B_0 \times X$  で定義された任意の関数  $\mu(\cdot, \cdot)$  に対して、

(a') 任意の  $B \in B_0$  に対して、 $\nu(B, \cdot)$  は  $S_2$ -可測関数

(b') 任意の  $x \in X$  に対して、 $\nu(\cdot, x)$  は  $B_0$  上の確率測度

を満たす  $B_0 \times X$  で定義された関数  $\nu(\cdot, \cdot)$  が存在して、任意の  $B \in B_0$  に対して

$$\nu(B, x) = \mu(B, x) \quad \text{a.e.}(S, P)$$

が成り立つ。

**定理 2.7.**

枠組  $(X, S, P, \{S^{(m)}\})$  を正則と仮定する。このとき、 $\{S_0^{(m)}\}$  を十分列とすると、任意の  $\{S^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\mu$  に対して、 $\{S_0^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\nu$  が存在して、 $\mu$  と  $\nu$  は同値である。

**3 十分推移性に対する必要十分条件**

前章において、十分推移性に対する必要条件について述べた。本章ではその必要条件を改良して、決定関数の条件付き期待値を用いて形で必要十分条件を求める。

### 定理 3.1.

$\{S_0^{(m)}\}$  が十分列となるための必要十分条件は、任意の  $\{S^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  に対して、 $\{S_0^{(m)}\}$ -可測最終決定則  $\{b_m^0\}$  が存在して、任意の  $m, C_m \in D_m, \theta \in \Omega$  に対して

$$E_\theta[\alpha_m(X)b_m(C_m, X)|S_0^{(m)}, x] = E_\theta[\alpha_m(X)|S_0^{(m)}, x]b_m^0(C_m, x) \quad \text{a.e.}(S, P_\theta) \quad (3.1)$$

が成り立つことである。

証明.

(十分性). まず、条件が満たされているとする。正の整数  $k$  を 1 つ選び、固定し

$$a_m(x) = \begin{cases} 0 & (m < k), \\ 1 & (m \geq k) \end{cases}$$

とおく。(1.1) より

$$\alpha_m(x) = \begin{cases} 0 & (m < k, m > k), \\ 1 & (m = k) \end{cases} \quad (3.2)$$

となる。任意の  $\{S^{(m)}\}$ -可測最終決定則  $\{b_m\}$  に対して、 $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  は  $\{S^{(m)}\}$ -可測決定関数であるから、仮定より  $\{S_0^{(m)}\}$ -可測最終決定則  $\{b_m^0\}$  が存在して、任意の  $m, C_m \in D_m, \theta \in \Omega$  に対して、(3.1) が成り立つ。ここで  $m = k$  とすると、(3.2) より

$$E_\theta[b_k(C_k, X)|S_0^{(k)}, x] = b_k^0(C_k, x) \quad \text{a.e.}(S, P_\theta)$$

となり、定理 2.1 より  $S_0^{(k)}$  は十分加法族となる。従って、 $k$  は任意であるから、 $S_0^{(m)}$  は十分列となる。

(必要性). 任意の  $\{S^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  に対して、定理 2.1 より各  $m = 1, 2, \dots$  に対して、

- (a) 任意の  $C_m \in D_m$  に対して、 $\phi_m(C_m, \cdot)$  は  $S_0^{(m)}$ -可測関数
- (b) 任意の  $x \in X$  に対して、 $\phi_m(\cdot, x)$  は  $D_m$  上の有限測度
- (c) 任意の  $C_m \in D_m, \theta \in \Omega$  に対して

$$\phi_m(C_m, x) = E_\theta[\alpha_m(X)b_m(C_m, X)|S_0^{(m)}, x] \quad \text{a.e.}(S, P_\theta) \quad (3.3)$$

を満たす  $\phi_m$  が存在する。そこで、任意の  $m, C_m \in D_m$  に対して

$$b_m^0(C_m, x) = \begin{cases} \phi_m(C_m, x)/\phi_m(D_m, x) & (\phi_m(D_m, x) > 0 \text{ のとき}) \\ \pi_m(C_m) & (\text{その他のとき}) \end{cases} \quad (3.4)$$

とおく。但し  $\pi_m$  は  $D_m$  上の任意の確率測度とする。このとき  $\{b_m^0\}$  は  $\{S_0^{(m)}\}$ -可測最終決定則となり、任意の  $m, C_m \in D_m, \theta \in \Omega$  に対して、 $S$ - $P_\theta$ -零集合を除いて

$$\begin{aligned} & E_\theta[\alpha_m(X)|S_0^{(m)}, x]b_m^0(C_m, x) \\ &= \phi_m(D_m, x)b_m^0(C_m, x) \quad [(3.3) \text{ で } C_m = D_m \text{ より}] \\ &= \phi_m(C_m, x) \quad [(3.4) \text{ より}] \\ &= E_\theta[\alpha_m(X)b_m(C_m, X)|S_0^{(m)}, x] \quad [(3.3) \text{ より}] \end{aligned}$$

となる。 ■

### 定理 3.2.

$\{S_0^{(m)}\}$  が十分推移列となるための必要十分条件は、任意の  $\{S^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  に対して、 $\{S_0^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\nu = [\{a_m^0\}, \{b_m^0\}]$  が存在して、任意の  $m, C_m \in D_m, \theta \in \Omega$  に対して

$$E_\theta[\alpha_m(X)b_m(C_m, X)|S_0^{(m)}, x] = E_\theta[\alpha_m^0(X)|S_0^{(m)}, x]b_m^0(C_m, x) \quad \text{a.e.}(S, P_\theta) \quad (3.5)$$

が成り立つことである。

証明.

(十分性). (3.5) で  $C_m = D_m$  とすると、任意の  $\theta \in \Omega$  に対して

$$E_\theta[\alpha_m(X)|S_0^{(m)}, x] = E_\theta[\alpha_m^0(X)|S_0^{(m)}, x] \quad \text{a.e.}(S, P_\theta)$$

となる。よって定理 2.4 より  $\{S_0^{(m)}\}$  は十分推移列となる。

(必要性). 任意の  $\{S^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  に対して、 $\{S_0^{(m)}\}$  の十分性を用いると、定理 3.1 より、 $\{S_0^{(m)}\}$ -可測最終決定則  $\{b_m^0\}$  が存在して、任意の  $m, C_m \in D_m, \theta \in \Omega$  に対して

$$E_\theta[\alpha_m(X)b_m(C_m, X)|S_0^{(m)}, x] = E_\theta[\alpha_m(X)|S_0^{(m)}, x]b_m^0(C_m, x) \quad \text{a.e.}(S, P_\theta) \quad (3.6)$$

となる。また  $\{S_0^{(m)}\}$  の十分性と推移性を用いると、定理 2.4 より、 $\{S_0^{(m)}\}$ -可測な停止則  $\{a_m^0\}$  が存在して、任意の  $m, \theta \in \Omega$  に対して

$$E_\theta[\alpha_m(X)|S_0^{(m)}, x] = E_\theta[\alpha_m^0(X)|S_0^{(m)}, x] \quad \text{a.e.}(S, P_\theta) \quad (3.7)$$

となる。よって (3.6), (3.7) より (3.5) が成り立つ。 ■



### 定理 3.3.

枠組  $(X, S, P, \{S^{(m)}\})$  を正則と仮定すると、定義 1.7 より必要十分推移列が存在し、それを  $\{S_*^{(m)}\}$  とおく。また確率分布族  $P = \{P_\theta; \theta \in \Omega\}$  はある  $\sigma$  有限測度に関して絶対連続とする。このとき、 $\{S_0^{(m)}\}$  が十分列となるための必要十分条件は、任意の  $\{S^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  に対して、 $\{S_0^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\nu = [\{a_m^0\}, \{b_m^0\}]$  が存在して、任意の  $m, C_m \in D_m, \theta \in \Omega$  に対して

$$E_\theta[\alpha_m(X)b_m(C_m, X)|S_*^{(m)}, x] = E_\theta[\alpha_m^0(X)|S_*^{(m)}, x]b_m^0(C_m, x) \quad \text{a.e.}(S, P_\theta) \quad (3.8)$$

が成り立つことである。

証明.

(十分性). 正の整数  $k$  を 1 つ選び、固定し

$$a_m(x) = \begin{cases} 0 & (m < k), \\ 1 & (m \geq k) \end{cases}$$

とおく。(1.1) より

$$\alpha_m(x) = \begin{cases} 0 & (m < k, m > k), \\ 1 & (m = k) \end{cases} \quad (3.9)$$

となる。ここで  $b_m(\cdot, \cdot)$  を次のように定める。

(i)  $m = k$  のとき

$a, b \in D_k$  ( $a \neq b$ ) を選び固定し、任意の  $A \in S_*^{(k)}$  に対して、

$$b_k(C_k, x) = \gamma(C_k)\chi_A(x) + \delta(C_k)(1 - \chi_A(x)) \quad (3.10)$$

とおく。但し

$$\gamma(C_k) = \begin{cases} 1 & (a \in C_k), \\ 0 & (a \notin C_k), \end{cases} \quad \delta(C_k) = \begin{cases} 1 & (b \in C_k), \\ 0 & (b \notin C_k) \end{cases}$$

とする。

(ii)  $m \neq k$  のとき

$$b_m(C_m, x) = \pi_m(C_m)$$

とおく。但し  $\pi_m$  は  $D_m$  上の任意の確率測度とする。

仮定より、この  $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  に対して、 $\{S_0^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\nu = [\{a_m^0\}, \{b_m^0\}]$  が存在して、任意の  $m, C_m \in D_m, \theta \in \Omega$  に対して、(3.8) が成り立つ。そこで (3.8) において  $C_m = D_m$  とすると、(3.9) より

$$E_\theta[\alpha_k^0(X)|S_*^{(k)}, x] = 1 \quad \text{a.e.}(S, P_\theta) \quad (3.11)$$

となる。また任意の  $C_k \in \mathbf{D}_k$  に対して (3.10) より、 $b_k(C_k, x)$  は  $\mathbf{S}_*^{(m)}$ -可測関数であるから

$$\gamma(C_k)\chi_A(x) + \delta(C_k)(1 - \chi_A(x)) = b_k^0(C_k, x) \quad \text{a.e.}(\mathbf{S}, \mathbf{P})$$

となる。ここで  $C_k = \{a\}$  とすると

$$\chi_A(x) = b_k^0(\{a\}, x) \quad \text{a.e.}(\mathbf{S}, \mathbf{P}) \quad (3.12)$$

となる。 $A_0 = \{x \in \mathbf{X} : b_k^0(\{a\}, x) = 1\}$  とおくと、 $A_0 \in \mathbf{S}_0^{(k)}$  であり、(3.12) より任意の  $\theta \in \Omega$  に対して

$$P_\theta(A \ominus A_0) = 0$$

となる。また、 $A \in \mathbf{S}_*^{(k)}$  は任意であるから、 $\mathbf{S}_*^{(k)} \subset \mathbf{S}_0^{(k)}(\mathbf{S}, \mathbf{P})$  となる。よって、 $\mathbf{S}_*^{(k)}$  は必要十分加法族であるから、確率分布族  $\mathbf{P}$  の絶対連続性より、 $\mathbf{S}^{(k)}$  は十分加法族となる。ゆえに  $k$  は任意であるから  $\{\mathbf{S}_0^{(m)}\}$  は十分列となる。

(必要性). 任意の  $\{\mathbf{S}^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  に対して、 $\{\mathbf{S}_*^{(m)}\}$  の十分性と推移性を用いると、定理 3.2 より、 $\{\mathbf{S}_*^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\nu_* = [\{a_m^*\}, \{b_m^*\}]$  が存在して、任意の  $m$ ,  $C_m \in \mathbf{D}_m$ ,  $\theta \in \Omega$  に対して

$$E_\theta[\alpha_m(X)b_m(C_m, X)|\mathbf{S}_*^{(m)}, x] = E_\theta[\alpha_m^*(X)|\mathbf{S}_*^{(m)}, x]b_m^*(C_m, x) \quad \text{a.e.}(\mathbf{S}, P_\theta) \quad (3.13)$$

が成り立つ。ここで、 $\{\mathbf{S}_*^{(m)}\}$  は必要列、 $\{\mathbf{S}_0^{(m)}\}$  は十分列であるから、各  $m = 1, 2, \dots$  に対して

$$\mathbf{S}_*^{(m)} \subset \mathbf{S}_0^{(m)}(\mathbf{S}, \mathbf{P})$$

が成り立つ。定理 2.6 の (ii) より、 $\{\mathbf{S}_0^{(m)}\}$ -可測な停止則が存在して、各  $m = 1, 2, \dots$  に対して

$$0 \leq a_m^0(x) \leq 1,$$

$$a_m^*(x) = a_m^0(x) \quad \text{a.e.}(\mathbf{S}, \mathbf{P})$$

を満たす。よって、各  $m = 1, 2, \dots$  に対して

$$\alpha_m^*(x) = \alpha_m^0(x) \quad \text{a.e.}(\mathbf{S}, \mathbf{P}) \quad (3.14)$$

となる。同様に、定理 2.6 の (iii) より、 $\{\mathbf{S}_0^{(m)}\}$ -可測最終決定則  $\{b_m^0\}$  が存在して、任意の  $m = 1, 2, \dots$ ,  $C_m \in \mathbf{D}_m$  に対して

$$b_m^0(C_m, x) = b_m^*(C_m, x) \quad \text{a.e.}(\mathbf{S}, \mathbf{P}) \quad (3.15)$$

となる。(3.14), (3.15) より、任意の  $m, C_m \in D_m, \theta \in \Omega$  に対して

$$E_\theta[\alpha_m^*(X)|S_*^{(m)}, x]b_m^*(C_m, x) = E_\theta[\alpha_m^0(X)|S_*^{(m)}, x]b_m^0(C_m, x) \quad \text{a.e.}(S, P_\theta) \quad (3.16)$$

が成り立つ。よって (3.13), (3.16) より (3.8) が成り立つ。 ■

この定理では、定理 2.7 で仮定した枠組  $(X, S, P, \{S^{(m)}\})$  の正則性に加えて、確率分布族  $P = \{P_\theta; \theta \in \Omega\}$  の絶対連続性を仮定している。絶対連続性の仮定は十分条件の証明において使っており、この仮定を欠くと必ずしも  $\{S_0^{(m)}\}$  が十分列となるとは限らない。

## 4 例

まず、定理 2.1 と定理 3.1 を比較する。 $\{S^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  を 1 つ与え、この  $\mu$  に対して、同値な  $\{S_0^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\nu = [\{a_m\}, \{b_m^0\}]$  は存在するが、定理 3.1 の (3.1), すなわち任意の  $m, C_m \in D_m, \theta \in \Omega$  に対して

$$E_\theta[\alpha_m(X)b_m(C_m, X)|S_0^{(m)}, x] = E_\theta[\alpha_m(X)|S_0^{(m)}, x]b_m^0(C_m, x) \quad \text{a.e.}(S, P_\theta)$$

を満たす  $\{S_0^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\nu = [\{a_m\}, \{b_m^0\}]$  は存在しない例を挙げる。

### 例 4.1.

$X = \{1, 2, 3\}$  とし、各  $m = 1, 2, \dots$  に対して、 $S^{(m)} = 2^X$ ,  $D_m = R^1$ ,  $D_m = B(R^1)$ ,  $S_0^{(m)} = \{\emptyset, X, \{1, 3\}, \{2\}\}$  で、 $P = \{P_{\theta_i}; i = 1, 2\}$  を

$$\begin{aligned} P_{\theta_1}(\{1\}) &= 1/2, P_{\theta_1}(\{2\}) = 1/2, P_{\theta_1}(\{3\}) = 0, \\ P_{\theta_2}(\{1\}) &= 1/3, P_{\theta_2}(\{2\}) = 5/12, P_{\theta_2}(\{3\}) = 1/4 \end{aligned}$$

とする。また、正の整数  $k$  を 1 つ選び、固定し

$$a_m(x) = \begin{cases} 0 & (m < k), \\ 1 & (m \geq k) \end{cases}$$

とおく。(1.1) より

$$\alpha_m(x) = \begin{cases} 0 & (m < k, m > k), \\ 1 & (m = k) \end{cases}$$

となる。さらに  $b_m(\cdot, \cdot)$  を次のように定める。

(i)  $m = k$  のとき

$a, b \in R^1$  ( $a \neq b$ ) を選び固定し

$$b_k(C_k, x) = \gamma(C_k)\chi_{\{1\}}(x) + \delta(C_k)\chi_{\{2\}}(x) + \left(\frac{2}{3}\gamma(C_k) + \frac{1}{3}\delta(C_k)\right)\chi_{\{3\}}(x)$$

とおく。但し

$$\gamma(C_k) = \begin{cases} 1 & (a \in C_k), \\ 0 & (a \notin C_k), \end{cases} \quad \delta(C_k) = \begin{cases} 1 & (b \in C_k), \\ 0 & (b \notin C_k) \end{cases}$$

とする。

(ii)  $m \neq k$  のとき

$$b_m(C_m, x) = \pi_m(C_m)$$

とおく。但し  $\pi_m$  は  $\mathbf{B}(\mathbf{R}^1)$  上の任意の確率測度とする。

このとき  $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  は  $\{\mathbf{S}^{(m)}\}$ -可測決定関数となっている。

(i)  $m = k$  のとき

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{X}} \alpha_k(x) b_k(C_k, x) P_{\theta_1}(dx) \\ &= \int_{\mathbf{X}} \left\{ \gamma(C_k) \chi_{\{1\}}(x) + \delta(C_k) \chi_{\{2\}}(x) + \left( \frac{2}{3} \gamma(C_k) + \frac{1}{3} \delta(C_k) \right) \chi_{\{3\}}(x) \right\} P_{\theta_1}(dx) \\ &= \frac{1}{2} \gamma(C_k) + \frac{1}{2} \delta(C_k), \\ & \int_{\mathbf{X}} \alpha_k(x) b_k(C_k, x) P_{\theta_2}(dx) \\ &= \int_{\mathbf{X}} \left\{ \gamma(C_k) \chi_{\{1\}}(x) + \delta(C_k) \chi_{\{2\}}(x) + \left( \frac{2}{3} \gamma(C_k) + \frac{1}{3} \delta(C_k) \right) \chi_{\{3\}}(x) \right\} P_{\theta_2}(dx) \\ &= \frac{1}{3} \gamma(C_k) + \frac{5}{12} \delta(C_k) + \frac{1}{6} \gamma(C_k) + \frac{1}{12} \delta(C_k) \\ &= \frac{1}{2} \gamma(C_k) + \frac{1}{2} \delta(C_k) \end{aligned}$$

になる。

(ii)  $m \neq k$  のとき

$$\int_{\mathbf{X}} \alpha_m(x) b_m(C_m, x) P_{\theta_1}(dx) = \int_{\mathbf{X}} \alpha_m(x) b_m(C_m, x) P_{\theta_2}(dx) = 0$$

になる。

そこで、 $b_m^0(\cdot, \cdot)$  を次のようにとる。

(i)  $m = k$  のとき

$$b_k^0(C_k, x) = \frac{1}{2} \gamma(C_k) + \frac{1}{2} \delta(C_k)$$

(ii)  $m \neq k$  のとき

$$b_m^0(C_m, x) = \pi'_m(C_m)$$

とおく。但し  $\pi'_m$  は  $\mathbf{B}(\mathbf{R}^1)$  上の任意の確率測度とする。

このとき  $\{b_m^0\}$  は  $\{\mathbf{S}_0^{(m)}\}$ -可測最終決定則となり、各  $i = 1, 2$  に対して、明らかに

$$\int_{\mathbf{X}} \alpha_m(x) b_m^0(C_m, x) P_{\theta_i}(dx) = \begin{cases} 0 & (m \neq k), \\ \frac{1}{2} \gamma(C_k) + \frac{1}{2} \delta(C_k) & (m = k) \end{cases}$$

となる。よって任意の  $m, \theta_i (i=1, 2), C_m \in \mathbf{B}(\mathbf{R}^1)$  に対して

$$\int_{\mathbf{X}} \alpha_m(x) b_m(C_m, x) P_{\theta_i}(dx) = \int_{\mathbf{X}} \alpha_m(x) b_m^0(C_m, x) P_{\theta_i}(dx)$$

となるから、 $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  と  $\nu = [\{a_m\}, \{b_m^0\}]$  は同値となる。

ところが、任意の  $m, \theta_i (i=1, 2), C_m \in \mathbf{B}(\mathbf{R}^1)$  に対して

$$E_{\theta_i}[\alpha_m(X) b_m(C_m, X) | \mathbf{S}_0^{(m)}, x] = E_{\theta_i}[\alpha_m(X) | \mathbf{S}_0^{(m)}, x] b_m^1(C_m, x) \quad \text{a.e.}(\mathbf{S}, P_{\theta_i}) \quad (4.1)$$

となる  $\{\mathbf{S}_0^{(m)}\}$ -可測最終決定則  $\{b_m^1\}$  は存在しない。実際、もし (4.1) を満たす  $\{\mathbf{S}_0^{(m)}\}$ -可測最終決定則  $\{b_m^1\}$  が存在したとすると、初めにとった  $k$  に対して

$$E_{\theta_i}[b_k(C_k, X) | \mathbf{S}_0^{(k)}, x] = b_k^1(C_k, x) \quad \text{a.e.}(\mathbf{S}, P_{\theta_i}) \quad (4.2)$$

が成り立つ。任意の  $C_k \in \mathbf{B}(\mathbf{R}^1)$  に対して、 $b_k^1(C_k, \cdot)$  は  $\mathbf{S}_0^{(k)}$ -可測関数であるから、適当な  $f(C_k), g(C_k)$  を用いて

$$b_k^1(C_k, x) = f(C_k) \chi_{\{1,3\}}(x) + g(C_k) \chi_{\{2\}}(x)$$

と表わすことができる。両辺を集合  $\{1, 3\}$  において積分すると

$$\begin{aligned} \int_{\{1,3\}} b_k^1(C_k, x) P_{\theta_1}(dx) &= \frac{1}{2} f(C_k), \\ \int_{\{1,3\}} E_{\theta_1}[b_k(C_k, X) | \mathbf{S}_0^{(k)}, x] P_{\theta_1}(dx) &= \int_{\{1,3\}} b_k(C_k, x) P_{\theta_1}(dx) \\ &= \frac{1}{2} \gamma(C_k) \end{aligned}$$

になる。よって (4.2) より

$$f(C_k) = \gamma(C_k) \quad (4.3)$$

となる。また

$$\begin{aligned} \int_{\{1,3\}} b_k^1(C_k, x) P_{\theta_2}(dx) &= \frac{7}{12} f(C_k), \\ \int_{\{1,3\}} E_{\theta_2}[b_k(C_k, X) | \mathbf{S}_0^{(k)}, x] P_{\theta_2}(dx) &= \int_{\{1,3\}} b_k(C_k, x) P_{\theta_2}(dx) \\ &= \frac{1}{3} \gamma(C_k) + \frac{1}{6} \gamma(C_k) + \frac{1}{12} \delta(C_k) \\ &= \frac{1}{2} \gamma(C_k) + \frac{1}{12} \delta(C_k) \end{aligned}$$

になる。よって (4.2) より

$$7f(C_k) = 6\gamma(C_k) + \delta(C_k) \quad (4.4)$$

となるので、(4.3), (4.4) より、 $\gamma(C_k) = \delta(C_k)$  となる。ところが、定義より、 $\gamma(C_k) \neq \delta(C_k)$  (例えば、 $C_k = \{a\}$  とすると、 $\gamma(\{a\}) = 1$ ,  $\delta(\{a\}) = 0$ ) であるから、矛盾となる。よって (4.1) を満たす  $\{b_m^1\}$  は存在しない。 ■

この例においては、定理 3.1 より  $\{S_0^{(m)}\}$  は十分列でないということが分かる。

次に、定理 2.5 と定理 3.2 を比較する。 $\{S^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  を 1 つ与え、この  $\mu$  に対して、同値な  $\{S_0^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\nu = [\{a_m^0\}, \{b_m^0\}]$  は存在するが、定理 3.2 の (3.5), すなわち任意の  $m$ ,  $C_m \in \mathbf{D}_m$ ,  $\theta \in \Omega$  に対して

$$E_\theta[\alpha_m(X)b_m(C_m, X)|S_0^{(m)}, x] = E_\theta[\alpha_m^0(X)|S_0^{(m)}, x]b_m^0(C_m, x) \quad \text{a.e.}(\mathbf{S}, P_\theta)$$

を満たす  $\{S_0^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\nu = [\{a_m^0\}, \{b_m^0\}]$  は存在しない例を挙げる。

#### 例 4.2.

$\mathbf{X}, S^{(m)}, \mathbf{D}_m, \mathbf{D}_m, S_0^{(m)}$  は例 4.1 と同じとする。また  $\mathbf{P} = \{P_{\theta_i}; i = 1, 2\}$  を

$$\begin{aligned} P_{\theta_1}(\{1\}) &= 1/3, P_{\theta_1}(\{2\}) = 1/3, P_{\theta_1}(\{3\}) = 1/3, \\ P_{\theta_2}(\{1\}) &= 1/4, P_{\theta_2}(\{2\}) = 1/4, P_{\theta_2}(\{3\}) = 1/2 \end{aligned}$$

とする。そこで正の整数  $k$  を 1 つ選び、固定し

$$a_m(x) = \begin{cases} 0 & (m < k), \\ \chi_{\{1\}}(x) & (m = k), \\ 1 & (m > k), \end{cases}$$

$$b_m(C_m, x) = \pi_m(C_m)$$

とおく。但し  $\pi_m$  は  $\mathbf{B}(\mathbf{R}^1)$  上の任意の確率測度とする。(1.1) より

$$\alpha_m(x) = \begin{cases} 0 & (m < k, m > k+1), \\ \chi_{\{1\}}(x) & (m = k), \\ 1 - \chi_{\{1\}}(x) = \chi_{\{2,3\}}(x) & (m = k+1) \end{cases}$$

となる。このとき  $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  は  $\{S^{(m)}\}$ -可測決定関数となっている。また

$$a_m^0(x) = \begin{cases} 0 & (m < k), \\ \chi_{\{2\}}(x) & (m = k), \\ 1 & (m > k), \end{cases}$$

$$b_m^0(C_m, x) = \pi_m(C_m)$$

とおくと、(1.1) より

$$\alpha_m^0(x) = \begin{cases} 0 & (m < k, m > k+1), \\ \chi_{\{2\}}(x) & (m = k), \\ 1 - \chi_{\{2\}}(x) = \chi_{\{1,3\}}(x) & (m = k+1) \end{cases}$$

となり、 $\nu = [\{a_m^0\}, \{b_m^0\}]$  は  $\{S_0^{(m)}\}$ -可測決定関数となっている。

(i)  $m = k$  のとき

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{X}} \alpha_k(x) b_k(C_k, x) P_{\theta_i}(dx) &= \int_{\mathbf{X}} \chi_{\{1\}}(x) \pi_k(C_k) P_{\theta_i}(dx) \\ &= \pi_k(C_k) P_{\theta_i}(\{1\}) = \begin{cases} \frac{1}{3} \pi_k(C_k) & (i = 1), \\ \frac{1}{4} \pi_k(C_k) & (i = 2), \end{cases} \\ \int_{\mathbf{X}} \alpha_k^0(x) b_k^0(C_k, x) P_{\theta_i}(dx) &= \int_{\mathbf{X}} \chi_{\{2\}}(x) \pi_k(C_k) P_{\theta_i}(dx) \\ &= \pi_k(C_k) P_{\theta_i}(\{2\}) = \begin{cases} \frac{1}{3} \pi_k(C_k) & (i = 1), \\ \frac{1}{4} \pi_k(C_k) & (i = 2) \end{cases} \end{aligned}$$

になる。

(ii)  $m = k + 1$  のとき

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{X}} \alpha_{k+1}(x) b_{k+1}(C_{k+1}, x) P_{\theta_i}(dx) &= \int_{\mathbf{X}} \chi_{\{2,3\}}(x) \pi_{k+1}(C_{k+1}) P_{\theta_i}(dx) \\ &= \pi_{k+1}(C_{k+1}) P_{\theta_i}(\{2,3\}) = \begin{cases} \frac{2}{3} \pi_{k+1}(C_{k+1}) & (i = 1), \\ \frac{3}{4} \pi_{k+1}(C_{k+1}) & (i = 2), \end{cases} \\ \int_{\mathbf{X}} \alpha_{k+1}^0(x) b_{k+1}^0(C_{k+1}, x) P_{\theta_i}(dx) &= \int_{\mathbf{X}} \chi_{\{1,3\}}(x) \pi_{k+1}(C_{k+1}) P_{\theta_i}(dx) \\ &= \pi_{k+1}(C_{k+1}) P_{\theta_i}(\{1,3\}) = \begin{cases} \frac{2}{3} \pi_{k+1}(C_{k+1}) & (i = 1), \\ \frac{3}{4} \pi_{k+1}(C_{k+1}) & (i = 2) \end{cases} \end{aligned}$$

になる。

(iii)  $m < k, m > k + 1$  のとき

$$\int_{\mathbf{X}} \alpha_m(x) b_m(C_m, x) P_{\theta_i}(dx) = \int_{\mathbf{X}} \alpha_m^0(x) b_m^0(C_m, x) P_{\theta_i}(dx) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

になる。

よって任意の  $m, \theta_i (i = 1, 2), C_m \in \mathbf{B}(\mathbf{R}^1)$  に対して

$$\int_{\mathbf{X}} \alpha_m(x) b_m(C_m, x) P_{\theta_i}(dx) = \int_{\mathbf{X}} \alpha_m^0(x) b_m^0(C_m, x) P_{\theta_i}(dx)$$

となるから、 $\mu = [\{a_m\}, \{b_m\}]$  と  $\nu = [\{a_m^0\}, \{b_m^0\}]$  は同値となる。

ところが、任意の  $m, \theta_i (i = 1, 2), C_m \in \mathbf{B}(\mathbf{R}^1)$  に対して

$$E_{\theta_i}[\alpha_m(X) b_m(C_m, X) | S_0^{(m)}, x] = E_{\theta_i}[\alpha_m^1(X) | S_0^{(m)}, x] b_m^1(C_m, x) \quad \text{a.e.}(\mathbf{S}, P_{\theta_i}) \quad (4.5)$$

となる  $\{S_0^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\nu_1 = [\{a_m^1\}, \{b_m^1\}]$  は存在しない。実際、もし (4.1) を満たす  $\{S_0^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\nu_1 = [\{a_m^1\}, \{b_m^1\}]$  が存在したとすると、(4.5) で  $C_m = \mathbf{R}^1$  として

$$E_{\theta_i}[\alpha_m(X) | S_0^{(m)}, x] = E_{\theta_i}[\alpha_m^1(X) | S_0^{(m)}, x] \quad \text{a.e.}(\mathbf{S}, P_{\theta_i}) \quad (i = 1, 2)$$

が成り立つ。

(i)  $m = k$  のとき

$$E_{\theta_i}[\chi_{\{1\}}(X)|S_0^{(k)}, x] = E_{\theta_i}[\alpha_k^1(X)|S_0^{(k)}, x] \quad \text{a.e.}(\mathbf{S}, P_{\theta_i}) \quad (4.6)$$

(ii)  $m < k$  のとき  $a_m^1(x) = 0$  a.e.  $(\mathbf{S}, P_{\theta_i})$  となるので、適当な実数  $A, B$  を用いて

$$\alpha_k^1(x) = a_k^1(x) = A\chi_{\{1,3\}}(x) + B\chi_{\{2\}}(x) \quad \text{a.e.}(\mathbf{S}, P_{\theta_i})$$

と表わすことができる。両辺を集合  $\{1, 3\}$  において積分すると、各  $i = 1, 2$  に対して

$$\begin{aligned} \int_{\{1,3\}} E_{\theta_i}[\chi_{\{1\}}(X)|S_0^{(k)}, x]P_{\theta_i}(dx) &= P_{\theta_i}(\{1\}), \\ \int_{\{1,3\}} E_{\theta_i}[\alpha_k^1(X)|S_0^{(k)}, x]P_{\theta_i}(dx) &= \int_{\{1,3\}} A\chi_{\{1,3\}}(x) + B\chi_{\{2\}}(x)P_{\theta_i}(dx) \\ &= AP_{\theta_i}(\{1, 3\}) \end{aligned}$$

となるから、(4.6) より

$$P_{\theta_i}(\{1\}) = AP_{\theta_i}(\{1, 3\}) \quad (4.7)$$

となる。また、両辺を 1 点集合  $\{2\}$  において積分すると、各  $i = 1, 2$  に対して

$$\begin{aligned} \int_{\{2\}} E_{\theta_i}[\chi_{\{1\}}(X)|S_0^{(k)}, x]P_{\theta_i}(dx) &= 0, \\ \int_{\{2\}} E_{\theta_i}[\alpha_k^1(X)|S_0^{(k)}, x]P_{\theta_i}(dx) &= \int_{\{2\}} A\chi_{\{1,3\}}(x) + B\chi_{\{2\}}(x)P_{\theta_i}(dx) \\ &= BP_{\theta_i}(\{2\}) \end{aligned}$$

となるから、(4.6) より

$$0 = BP_{\theta_i}(\{2\})$$

となる。 $P_{\theta_i}(\{2\}) \neq 0$  ( $i = 1, 2$ ) より、 $B = 0$  となる。また (4.7) より、

$$(i) \ i = 1 \text{ のとき、 } \frac{1}{3} = \frac{2}{3}A \text{ より、 } A = \frac{1}{2},$$

$$(ii) \ i = 2 \text{ のとき、 } \frac{1}{4} = \frac{3}{4}A \text{ より、 } A = \frac{1}{3}$$

となるので矛盾となる。よって (4.5) を満たす  $\{S_0^{(m)}\}$ -可測決定関数  $\nu_1 = [\{a_m^1\}, \{b_m^1\}]$  は存在しない。 ■

この例においては  $S_0^{(m)} = S_0^{(m+1)} \subset S^{(m)}$  であるので、任意の  $m, B \in S_0^{(m+1)}, \theta_i$  ( $i = 1, 2$ ) に対して

$$E_{\theta_i}[\chi_B(X)|S^{(m)}, x] = E_{\theta_i}[\chi_B(X)|S_0^{(m)}, x] = \chi_B(x) \quad \text{a.e.}(\mathbf{S}, P_{\theta_i})$$



が成り立つ。よって定義 1.6 より  $\{S_0^{(m)}\}$  は推移列となる。

一方で定理 3.2 より  $\{S_0^{(m)}\}$  は十分推移列でないことが分かるので、 $\{S_0^{(m)}\}$  は推移列ではあるが十分列ではないということが分かる。

## 参考文献

- [AK96] 赤平昌文, 小池健一 : 統計的逐次決定方式の性質について. 数学 48 (1996), 72–83.
- [B54] Bahadur, R.R. : Sufficiency and statistical decision functions. *Ann. Math. Statist.* 25 (1954), 423–462.
- [F67] Ferguson, T.S. : *Mathematical Statistics*. Academic Press, New York (1967).
- [S85] Siegmund, D. : *Sequential Analysis*. Springer, New York (1985).